

G1 Wie gelangt die elektrische Energie zum Verbraucher? Fließt die Energie wirklich durch die Anschlussdrähte? (Teil I)

Zusammenfassung

Der Aufsatz erläutert anschaulich, wie der Transport der elektrischen Energie vom Erzeuger zum Verbraucher im Detail erfolgt. Die Rechnung mit Hilfe grundlegender Beziehungen aus den Grundlagen der Elektrotechnik und dem Poynting-Vektor ermöglicht es, den physikalisch realen Transport der Energie räumlich quantitativ nachzuvollziehen und zu verstehen. An vereinfachten Beispielen wird gezeigt, wie die Energie über zwei Sammelschienen zu den Verbrauchern und insbesondere in die Verbraucher hinein gelangt. Bei den Verbrauchern handelt es sich exemplarisch um einen Widerstand, einen Kondensator, eine Spule und schließlich einen bewegten Leiter im magnetischen Feld als einfachste Form eines Gleichstrommotors. Es wird dargestellt, dass die Energie keinesfalls in den Zuleitungen transportiert wird, sondern durch den umgebenden Raum.

Einleitung

In der Praxis wird die elektrische Leistung, also der Quotient Energie durch Zeit, fast immer mit Hilfe der Spannung U und des Stromes I berechnet, weil dies besonders einfach ist und zu richtigen Ergebnissen führt. Jedoch kann dies die Vorstellung hervorrufen, dass die elektrische Energie ähnlich wie Wasser bei einer Wasserleitung oder wie Gas bei einer Gasleitung innerhalb der elektrischen Leiter übertragen wird. Diese Vorstellung ist aber physikalisch eindeutig falsch; die Energie wird vielmehr im elektromagnetischen Feld außerhalb der Leiter übertragen. Zur Berechnung der Leistung im Feld dient der Poynting-Vektor \vec{S} . Mehr oder weniger umfangreich beschreiben das diverse Physikbücher und Bücher über theoretische Elektrotechnik, beispielsweise [1], und einige Lehrbücher zu den Grundlagen der Elektrotechnik, beispielsweise [2] bis [4]. Die Abhandlungen in den Büchern sind häufig mathematisch aufwändig und dadurch schwer zugänglich. Eine qualitative grafische Darstellung einer Energieübertragung aus Batterie, Übertragungsleitung und Verbraucher mit Verwendung des Poynting-Vektors ist in [5] gegeben.

Sehr selten dagegen findet man anschauliche, quantitative Darstellungen darüber, wie die Energie aus dem elektromagnetischen Feld in Widerstände, Kondensatoren, Spulen und Motoren gelangt. Dies soll daher hier exemplarisch und zusammenfassend an idealisierten Anordnungen gezeigt werden. Die Idealisierung ist dabei notwendig, um die Zusammenhänge hinreichend einfach darzustellen; sie führt aber nicht zu einer Einschränkung der allgemeinen Gültigkeit.

In Teil I dieses Aufsatzes wird der Transport der Energie zunächst am Beispiel zweier Sammelschienen behandelt, um das grundsätzliche Vorgehen vorzubereiten. Danach folgt eine entsprechende Betrachtung an einem Widerstand. Teil II be-

handelt einen Kondensator, eine Spule und schließlich einen bewegten Leiter im magnetischen Feld. Betrachtet wird dabei die strömende Energie im Raum zwischen zwei parallelen Sammelschienen oder in ein Gerät hinein, also von außen in den Widerstand, in den Kondensator, in die Spule oder in den bewegten Leiter. Die Abschnitte zu den Sammelschienen und zum Widerstand stützen sich vor allem auf [4] und [6].

Obwohl der Poynting-Vektor primär den Transport von Energie beschreibt, ist im Text auch häufig von Leistung die Rede. Dafür gibt es zwei Gründe: Zum einen stellt der Poynting-Vektor die Leistungsdichte dar, also diejenige Energie, die pro Zeit durch eine Fläche transportiert wird. Zum anderen vergleichen wir die mit Hilfe des Poynting-Vektors erhaltenen Resultate mit der herkömmlich als Produkt aus Spannung und Strom berechneten Leistung.

Leistung am Beispiel von Sammelschienen

Bild 1 zeigt zwei parallele Sammelschienen mit rechteckigem Querschnitt. Es sei angenommen, dass die Sammelschienen keinen elektrischen Widerstand haben und sehr lang sind. Ihre Breite b ist groß gegenüber ihrem Abstand a . In dieser idealisierten Anordnung bestehen im Raum zwischen den Sammelschienen fern von deren Enden und Rändern nahezu homogene magnetische und elektrische Felder mit den Feldstärken \vec{H} und \vec{E} . Die Werte der Feldstärken außerhalb dieses Raumes sind klein und werden hier vernachlässigt.

Der Betrag H der magnetischen Feldstärke errechnet sich aus der Stromstärke I in den Sammelschienen und der Breite b der Sammelschienen beispielsweise gemäß [1] bis [4] aus dem Durchflutungsgesetz zu

$$H = \frac{I}{b}.$$

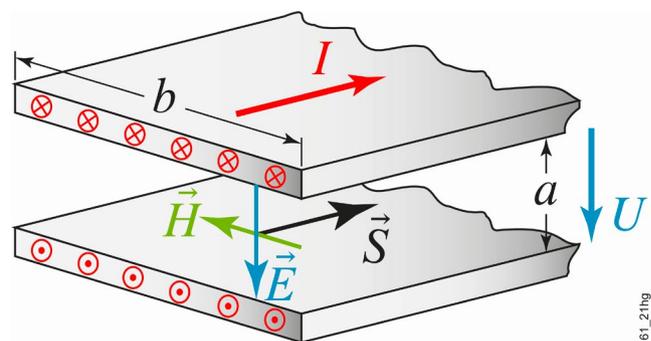


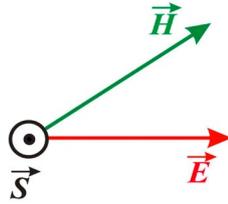
Bild 1: Zwei Sammelschienen mit dem Vektor der elektrischen Feldstärke \vec{E} , dem Vektor der magnetischen Feldstärke \vec{H} und dem Poynting-Vektor \vec{S} im Raum zwischen den Sammelschienen (61/21hg)

(John Henry Poynting, 1852 -1914):

Poynting-Vektor: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$
 = elektromagnetische Leistungsdichte

SI-Einheiten:
 $[S] = [E] [H] = \text{V/m} \cdot \text{A/m} = \text{W/m}^2$

S beschreibt die Leistung P , die je Fläche übertragen wird.



75/19a

Bild 2: Berechnung des Poynting-Vektors (75/19a)

Die Richtung des in Bild 1 eingezeichneten Vektors der magnetischen Feldstärke \vec{H} hängt von der Richtung des Stromes I ab: Die magnetische Feldstärke und die Richtung des Stromes sind rechtssinnig einander zugeordnet.

Der Betrag E der elektrischen Feldstärke errechnet sich aus der Spannung U zwischen den Sammelschienen und dem Abstand a der Sammelschienen gemäß der Definition der Spannung zu

$$E = \frac{U}{a}$$

Die Richtung des in Bild 1 eingezeichneten Vektors der elektrischen Feldstärke \vec{E} entspricht der Richtung des Zählpfeils der Spannung U .

John Henry Poynting (1852 – 1914) hat nun erstmalig exakt gezeigt, dass die vektorielle Multiplikation der Vektoren \vec{E} und \vec{H} , also $\vec{E} \times \vec{H}$ in Bild 2, einen Vektor \vec{S} ergibt, der eine besondere Aussage ermöglicht. Der Vektor \vec{S} stellt nämlich den Vektor der Leistungsdichte dar und wird Poynting-Vektor genannt (siehe DIN 1324-1). Das Integral des Vektors \vec{S} über eine Fläche ist gleich der elektromagnetischen Leistung, mit der Energie durch diese Fläche transportiert wird.

Wählt man für E die Einheit V/m und für H die Einheit A/m, so erhält S die Einheit W/m². Die Richtung des Poynting-Vektors ergibt sich, wenn man die Richtung der elektrischen Feldstärke \vec{E} auf dem kürzesten Wege in die Richtung der magnetischen Feldstärke \vec{H} dreht und mit dieser Drehung gedanklich das Fortschreiten einer Rechtsschraube verbindet. Um den Betrag S des Poynting-Vektors zu erhalten, muss man beim vektoriellen Multiplizieren der Vektoren \vec{E} und \vec{H} gemäß $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ auch den Sinus des Winkels zwischen \vec{E} und \vec{H} berücksichtigen. In den Beispielen dieses Aufsatzes ist dieser Winkel aber stets gleich 90°, sein Sinus also gleich 1. Es genügt hier also, das Produkt der Beträge der Vektoren zu bilden, um den Betrag des Poynting-Vektors zu erhalten.

In Bild 1 weist der Poynting-Vektor im gesamten Raum zwischen den Sammelschienen von der Quelle zum Verbraucher, also in der Tat gerade in die Richtung, in die bei der gewählten Richtung der Zählpfeile von Strom I und Spannung U die Energie fließt. Innerhalb der Sammelschienen wird hier nach aber keine Energie transportiert, weil dort die elektrische Feldstärke und damit auch die elektromagnetische Leistungsdichte S gleich Null sind. Hört man dies zum ersten Male, so erscheint das äußerst erstaunlich und vielleicht sogar befremdlich. Der Sachverhalt hat sich aber im Laufe von nun

mehr als 100 Jahren als ausnahmslos richtig erwiesen. Für tiefer gehende Erörterungen ist diese Betrachtungsweise sogar zwingend notwendig.

Bildet man nun konkret für den in Bild 1 vorliegenden Fall das vektorielle Produkt $\vec{E} \times \vec{H}$ und berücksichtigt wie erwähnt, dass die Vektoren \vec{E} und \vec{H} senkrecht auf einander stehen, reduziert sich $\vec{E} \times \vec{H}$ auf $E \cdot H$ und man erhält für S :

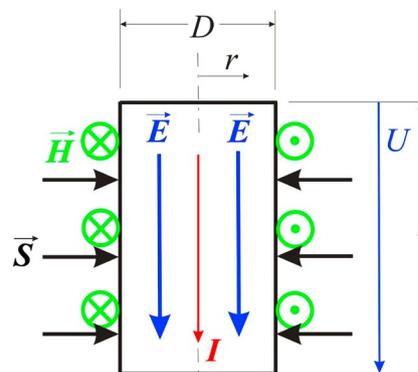
$$S = \frac{U}{a} \cdot \frac{I}{b} = \frac{P}{a \cdot b}$$

Das ist aber gerade der Quotient aus der im Beispiel übertragenen Leistung P und der Querschnittsfläche zwischen den Sammelschienen. Man kann also tatsächlich die Leistung P wie üblich aus dem Produkt UI oder auch aus den Feldstärken E und H berechnen. Das Ergebnis ist in beiden Fällen selbstverständlich gleich, aber nur die Berechnung aus E und H gibt den tieferen physikalischen Zusammenhang für jeden Punkt im Raum korrekt wieder. Mit Hilfe von S lässt sich also – im Gegensatz zu U und I – wirklich lokal bestimmen, auf welche Weise genau die Energie transportiert wird.

Leistung in einem Widerstand

Bild 3 zeigt einen kreis-zylindrischen Leiter mit dem Durchmesser D und der Länge l . Der Leiter bestehe aus einem Werkstoff mit überall gleichem spezifischen Widerstand. Nur die Stirnflächen seien widerstandslose Platten. Sie sind mit den Zuleitungen verbunden. Am Leiter liege die Spannung U , und durch den Leiter fließe der Strom I . Man beobachtet dabei, dass sich der so konstruierte Widerstand erwärmt. Irgendwie muss also elektrische Energie in den Leiter transportiert und dort in Wärmeenergie umgewandelt werden. Gemäß unseren Vorbetrachtungen kann dies allein durch das Zusammenwirken eines elektrischen Feldes und eines magnetischen Feldes geschehen.

Wie gelangt nun aber die Energie aus dem elektromagnetischen Feld in den Leiter? Über die Stirnflächen kann keine Energie fließen, weil dort die elektrische Feldstärke wegen des fehlenden Widerstandes gleich Null ist. Es bleibt nur noch die Mantelfläche des Zylinders.



61/25w

Bild 3: Zylindrischer Leiter mit der elektromagnetischen Leistungsdichte S auf seiner Mantelfläche (61/25w)

An der Mantelfläche des Zylinders gilt unter Vernachlässigung von Randeffekten*) für die Beträge der Vektoren \vec{E} und \vec{H} :

$$E = \frac{U}{l}; \quad H = \frac{I}{\pi D}.$$

Daraus folgt:

$$S = E H = \frac{U I}{l \pi D}.$$

Der Poynting-Vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ ist überall senkrecht in die Mantelfläche hinein gerichtet. Aus dem Betrag S des Poynting-Vektors erhält man die gesamte Leistung P , die dem Zylinder zugeführt wird, indem man S mit der Fläche des Zylindermantels multipliziert, also:

$$P = S l \pi D = U I$$

Dieses Ergebnis ist natürlich mit dem üblicherweise berechneten Wert identisch, wie es sein muss.

Fragt man nun aber nach der Leistung, die das zylindrische Volumen $l r^2 \pi$ mit dem beliebigen Radius $r \leq (D/2)$ aufnimmt, so ist der Betrag des Poynting-Vektors $S(r)$ an der Stelle r zu ermitteln. Man erhält zunächst für die elektrische Feldstärke wieder

$$E = \frac{U}{l}.$$

Die magnetische Feldstärke H ist vom Radius r abhängig. Bei konstanter Stromdichte im gesamten Querschnitt des Leiters erhält man für $H(r)$ mit Hilfe des Durchflutungssatzes gemäß [3] oder [4]

$$H(r) = \frac{2I}{\pi D^2} r.$$

Daraus folgt für den Poynting-Vektor:

$$S(r) = E H(r) = \frac{U}{l} \frac{2I}{\pi D^2} r.$$

Für $r = 0$ wird der Poynting-Vektor zu Null, denn auf dem Weg vom Zylindermantel mit dem Durchmesser D bis zur Achse des Zylinders ist die elektromagnetische Energie bereits vollständig in Wärmeenergie umgewandelt worden. Diesen physikalischen Vorgang kann man im Übrigen nur dann erkennen, wenn man den Poynting-Vektor verwendet.

* Vernachlässigung von Randeffekten: Natürlich sind tatsächlich auch außerhalb des Widerstandes (und analog auch des Kondensators, der Spule und des bewegten Leiters) ein elektrisches und ein magnetisches Feld vorhanden, weil sonst dort kein Poynting-Vektor existieren könnte und man sich mit Recht fragen müsste, wie die Energie aus dem umgebenden Raum zum Leiter oder zur Mantelfläche gelangt. Auf diese detaillierte Diskussion verzichten wir in diesem Aufsatz bewusst.

Teil II des Aufsatzes folgt im ETG journal 01/2022

Schriftum

- [1] Simonyi, K.: Theoretische Elektrotechnik. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956
- [2] Oberdorfer, Günther: Lehrbuch der Elektrotechnik. Band I: Die wissenschaftlichen Grundlagen der Elektrotechnik. München: R. Oldenburg Verlag: 1961
- [3] Weiss, Alexander von: Die elektromagnetischen Felder. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg 1983
- [4] Nerretter, Wolfgang: Grundlagen der Elektrotechnik. München, Wien: Carl Hanser Verlag 2006
- [5] https://en.wikipedia.org/wiki/Poynting_Vector (nachgesehen am 18.02.2021)
- [6] Christoph, Claus: Grundlagen der Elektrotechnik II. Unveröffentlichtes Skript. Fachhochschule Hannover, etwa 1986.



Prof. Dr.-Ing. Fred Wiznerowicz
Hochschule Hannover



Prof. Dr.-Ing. habil. Hartmut Grabinski
Leibniz Universität Hannover



Prof. Dr.-Ing. Erhart Kunze
Hochschule Hannover

G1 Wie gelangt die elektrische Energie zum Verbraucher? Fließt die Energie wirklich durch die Anschlussdrähte? (Teil II)

Zusammenfassung

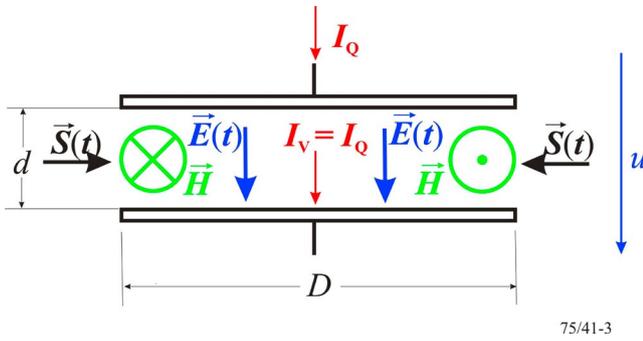
Der Aufsatz erläutert in zwei Teilen anschaulich, wie der Transport der elektrischen Energie vom Erzeuger zum Verbraucher im Detail erfolgt. Die Rechnung mit Hilfe grundlegender Beziehungen aus den Grundlagen der Elektrotechnik und dem Poynting-Vektor ermöglicht es, den physikalisch realen Transport der Energie räumlich quantitativ nachzuvollziehen und zu verstehen. An vereinfachten Beispielen wird in diesem Teil II gezeigt, wie die Energie in einen Kondensator, in eine Spule und schließlich in einen bewegten Leiter im magnetischen Feld gelangt, letzteres als einfachste Form eines Gleichstrommotors. Es wird dargestellt, dass die Energie keinesfalls in den Zuleitungen transportiert wird, sondern durch den umgebenden Raum.

Aufladung eines Plattenkondensators

Nach der Aufladung eines Plattenkondensators mit der Kapazität C auf die Spannung U enthält das elektrische Feld des Kondensators bekanntlich die Energie

$$W_c = \frac{1}{2} C U^2.$$

Wie gelangt aber die Energie in den zylinderförmigen Raum zwischen den hier als widerstandslos angenommenen Platten eines beispielsweise kreisrunden Plattenkondensators gemäß *Bild 4*? Entsprechend den bisherigen Überlegungen kann die Energie auch hier nicht durch die Platten fließen, da bei idealer Leitfähigkeit dieser Platten dort die elektrische Feldstärke verschwindet und mit ihr der Poynting-Vektor. Es bleibt wieder nur der Fluss der Energie durch die Mantelfläche. Dieser Fluss der Energie lässt sich in seinem zeitlichen Ablauf gut verfolgen.



75/41-3

Bild 4: Aufladung eines runden Plattenkondensators mit einem konstanten Strom I_Q . Schematisch eingetragen sind die Vektoren \vec{E} , \vec{H} und \vec{S} auf der Mantelfläche des zylindrischen Dielektrikums (75/41_3)

Die kreisförmigen Platten mit dem Durchmesser D mögen gemäß Bild 4 den Abstand d voneinander haben. Der Durchmesser D sei groß gegenüber dem Abstand d . Es wird daher – analog zum Widerstand – vereinfachend angenommen, dass das elektrische Feld außerhalb des Kondensators gegenüber jenem im Inneren vernachlässigt werden kann.

Der anfangs ungeladene Kondensator werde im Beispiel aus einer idealen Konstantstromquelle mit dem zeitlich konstanten Quellenstrom I_Q aufgeladen. I_Q fließt als sogenannter Verschiebungsstrom I_V durch das Dielektrikum weiter, also $I_V = I_Q$. Um zur magnetischen Feldstärke H auf der Mantelfläche zu gelangen, formuliert man das Durchflutungsgesetz für eine gedachte kreisförmige Randkurve um das Dielektrikum mit dem Durchmesser D und erhält für H auf der Randkurve:

$$H \pi D = I_Q \quad \text{beziehungsweise} \quad H = \frac{I_Q}{\pi D}$$

Die Spannung $u(t)$ am Kondensator steigt wegen des konstanten Stroms I_Q proportional zur Zeit t an. Es gilt also

$$I_Q = C \frac{du(t)}{dt} \quad \text{und somit} \quad u(t) = \frac{I_Q}{C} t.$$

Für die elektrische Feldstärke E am und im Kondensator gilt damit

$$E(t) = \frac{u(t)}{d}.$$

Wie die elektrische Feldstärke ist dann natürlich auch der Betrag des Poynting-Vektors S auf der Mantelfläche von der Zeit t abhängig. Es gilt:

$$S(t) = E(t) H = \frac{u(t)}{d} \frac{I_Q}{\pi D}$$

Multipliziert man $S(t)$ mit der Mantelfläche $\pi D d$, so erhält man die Leistung $P(t)$ auf der Mantelfläche zu:

$$P(t) = u(t) I_Q = \frac{I_Q^2 t}{C}$$

Nach Ablauf der Zeit $t = T$ möge die Spannung $u(t)$ am Kondensator gerade den Wert U erreicht haben. Es gelten dann die Beziehungen

$$U = \frac{I_Q}{C} T \quad \text{beziehungsweise} \quad T = \frac{UC}{I_Q}.$$

Nun werde die Energie W_C berechnet, die dem Kondensator während des Zeitraumes T zugeführt wurde. Dazu bildet man das Integral über $P(t)$ während des gesamten Ladevorganges von $t = 0$ bis $t = T$. Man erhält:

$$W_C = \int_0^T P(t) dt = \int_0^T \frac{I_Q^2 t}{C} dt = \frac{I_Q^2}{C} \frac{1}{2} T^2 = \frac{1}{2} C U^2$$

Das stimmt natürlich mit dem am Anfang dieses Abschnitts angegebenen Wert W_C überein.

Die Rechnung mit Hilfe des Poynting-Vektors ermöglicht es, den physikalisch realen Energietransport in das elektrische Feld des Kondensators quantitativ nachzuvollziehen und damit zu verstehen. Analog zum Widerstand existiert der Poynting-Vektor auch im Inneren des betrachteten Kondensators.

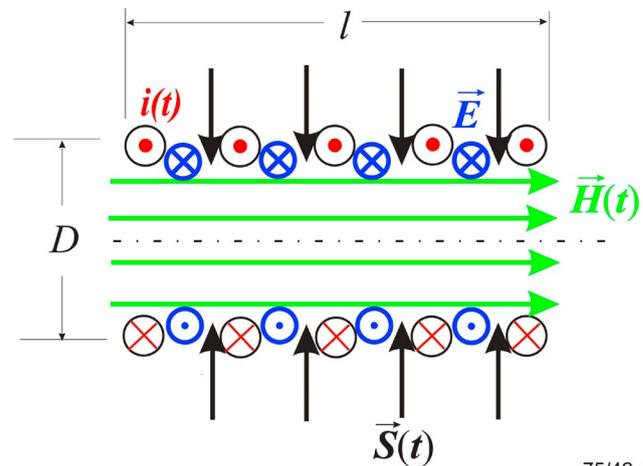
Einschalten einer Spule

Beim Einschalten einer Spule mit der Selbstinduktivität L an eine ideale Spannungsquelle mit der konstanten Quellenspannung U_Q steigt die in ihrem magnetischen Feld gespeicherte Energie mit der Stromstärke $i(t)$ an. Erreicht die Stromstärke $i(t)$ schließlich irgendwann den Wert I , so beträgt die gespeicherte Energie bekanntlich

$$W_L = \frac{1}{2} L I^2.$$

Auch hier sei wieder die Frage gestellt: Wie gelangt die Energie in den vom magnetischen Feld erfüllten Raum innerhalb der Spule?

Betrachtet sei hierzu die in Bild 5 dargestellte sehr lange zylindrische Luft-Spule, die an eine ideale Spannungsquelle mit der Quellenspannung U_Q angeschlossen wird. Die Wicklung der Spule besteht aus sehr dünnem Draht, hat die Windungszahl N und besitzt keinen ohmschen Widerstand. Die Länge l der Spule ist sehr groß gegenüber ihrem Durchmesser D . Unter dieser Voraussetzung ist die magnetische Feldstärke



75/42_2

Bild 5: Lange Zylinderspule bei zunehmender Stromstärke $i(t)$. Dargestellt sind das homogene magnetische Feld mit der Feldstärke \vec{H} im Inneren der Spule, das elektrische Feld mit der Feldstärke \vec{E} auf der Mantelfläche und der Poynting-Vektor \vec{S} auf der Mantelfläche (75/42_2).

ke außerhalb der Spule sehr klein und wird deshalb – wieder analog zum Widerstand und zum Kondensator – hier vernachlässigt.

Unter den genannten Bedingungen erhält man im Inneren der Spule mit Hilfe des Durchflutungssatzes ein homogenes magnetisches Feld mit der magnetischen Feldstärke $H(t)$. Es ist

$$H(t) = \frac{N i(t)}{l} .$$

Ferner gilt das Induktionsgesetz für die Spannung $u(t)$ an der Spule:

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

Bei Anschluss der Spule an die ideale Spannungsquelle mit der konstanten Quellenspannung U_Q folgt daraus

$$U_Q = L \frac{di(t)}{dt} \quad \text{und somit} \quad i(t) = \frac{U_Q}{L} t .$$

Für die magnetische Feldstärke $H(t)$ gilt so schließlich

$$H(t) = \frac{N}{l} \frac{U_Q}{L} t .$$

An je einer Windung der Spule liegt die Spannung U_Q/N . Bei einer Windungslänge von πD ergibt sich daraus der Betrag E der induzierten elektrischen Feldstärke längs der Wicklung und damit in der Mantelfläche des von der Wicklung gebildeten Zylinders mit dem Durchmesser D zu

$$E = \frac{U_Q}{N \pi D} .$$

Die elektrische Feldstärke E ist zeitlich konstant, weil die angelegte Spannung U_Q zeitlich konstant ist. Die Richtung des Vektors der elektrischen Feldstärke \vec{E} kann man beispielsweise aus der Lenzschen Regel [4] herleiten: Könnte nämlich die elektrische Feldstärke \vec{E} einen Strom treiben, so müsste dieser Strom gemäß der Lenzschen Regel versuchen, den Anstieg des magnetischen Flusses zu verhindern. Daraus ergibt sich die in *Bild 5* eingetragene Richtung der Feldstärke \vec{E} . Es existieren also ein elektrisches Feld und ein magnetisches Feld. Die Vektoren \vec{E} und \vec{H} stehen wieder senkrecht aufeinander. Das Vektorprodukt aus \vec{E} und \vec{H} ist der Poynting-Vektor \vec{S} auf der Mantelfläche. Er weist in die Mantelfläche hinein. Es fließt also Energie in den vom magnetischen Feld erfüllten Raum innerhalb der Spule. Der von der Zeit abhängige Betrag $S(t)$ der Leistungsdichte auf der Mantelfläche ergibt sich, indem man den Betrag der elektrischen Feldstärke E mit dem Betrag der magnetischen Feldstärke $H(t)$ multipliziert:

$$S(t) = E H(t) = \frac{U_Q}{N \pi D} \frac{N}{l} \frac{U_Q}{L} t = \frac{U_Q^2}{\pi D l L} t$$

Die Leistung $P(t)$ erhält man, indem man $S(t)$ mit der Mantelfläche multipliziert:

$$P(t) = S(t) \pi D l = \frac{U_Q^2}{L} t$$

Nach Ablauf der Zeit $t = T$ möge die Stromstärke in der Spule den Wert I erreicht haben. Es gelten dann die Beziehungen

$$I = \frac{U_Q}{L} T \quad \text{beziehungsweise} \quad T = \frac{I L}{U_Q} .$$

Bildet man auch hier wieder das Integral über $P(t)$ während des gesamten Einschaltvorganges von $t = 0$ bis $t = T$, so erhält man die Energie W_L , die der Spule während des Einschaltvorganges zugeführt worden ist:

$$W_L = \int_0^T P(t) dt = \frac{U_Q^2}{L} \frac{T^2}{2} = \frac{1}{2} L I^2$$

Diese Energie ist im magnetischen Feld der Spule gespeichert und stimmt mit dem am Anfang dieses Abschnitts angegebenen Wert W_L überein. Auch hier ermöglicht es die Rechnung mit dem Poynting-Vektor, den physikalisch realen Energietransport in das magnetische Feld der Spule quantitativ nachzuvollziehen und damit zu verstehen. Analog zum Widerstand und zum Kondensator existiert der Poynting-Vektor auch im Inneren der betrachteten Spule.

Übertragung der Energie auf einen bewegten Leiter im magnetischen Feld

Lehrbücher verwenden einen bewegten Leiter im magnetischen Feld häufig als einfaches Modell für einen Gleichstrommotor. Dieses Modell wird auch in diesem Aufsatz verwendet.

Betrachtet sei ein runder Leiter mit dem Durchmesser D , der sich im stationären Betrieb gemäß *Bild 6* im Raum zwischen zwei Gleitschienen mit dem Abstand l bewegt. In diesem Raum existiere ein extern erzeugtes, homogenes magnetisches Feld mit der Feldstärke H_f und der Flussdichte B_f . Der Leiter mit dem Widerstand R_L sei über die beiden widerstandslosen Gleitschienen mit einer idealen Spannungsquelle mit der konstanten Quellenspannung U_Q verbunden, so dass überall zwischen den Gleitschienen die Spannung U_Q liegt.

Im stationären Betrieb bewegt sich der Leiter mit konstanter Geschwindigkeit v und führt letztlich den konstanten Strom I . Auf ihn wirkt dabei die konstante Kraft F . Der Zusammenhang zwischen I , l und B_f ist durch die Lorentzkraft mit dem Betrag $F = I l B_f$ gegeben. Der Leiter gibt die konstante mechanische Leistung $P_{\text{mech}} = F v$ ab.

Bei den folgenden Betrachtungen werden wieder ideale Verhältnisse vorausgesetzt; Randeffekte werden also vernachlässigt.

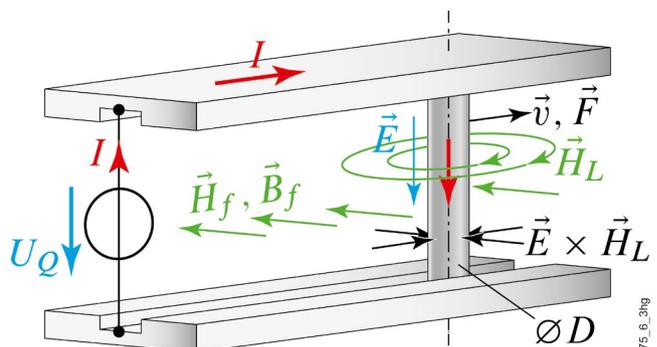


Bild 6: Bewegter Leiter im magnetischen Feld. Dargestellt sind die Feldstärken an der Oberfläche des Leiters, der sich mit konstanter Geschwindigkeit v im Feld bewegt und auf den die Kraft F einwirkt. Nicht dargestellt ist $\vec{E} \times \vec{H}_f$, weil diese Komponente des Poynting-Vektors insgesamt keine Leistung in den Leiter überträgt. (75_6_3hg)

Infolge des Stromes I umgibt sich der Leiter gemäß Durchflutungsgesetz mit einem zusätzlichen magnetischen Feld mit der Feldstärke \vec{H}_L . Die Feldlinien dieses Feldes sind konzentrische Kreise um den Leiter. An der Oberfläche des Leiters gilt für den Betrag H_L der magnetischen Feldstärke

$$H_L = \frac{I}{\pi D}.$$

Im Folgenden wird die elektrische Feldstärke E zwischen den Gleitschienen und damit auch auf der Oberfläche des Leiters betrachtet. Diese Feldstärke E hat die Richtung des Stromes I und beträgt wegen der konstanten Spannung U_Q zwischen den Gleitschienen

$$E = \frac{U_Q}{l}.$$

Infolge der Bewegung des Leiters mit der Geschwindigkeit v wird im Leiter ein zusätzliches elektrisches Feld mit der Feldstärke E_i induziert. Hierfür gilt

$$E_i = v B_f.$$

Gemäß der Lenzschen Regel [4] wirkt die induzierte Feldstärke E_i ihrer Ursache entgegen, also der Feldstärke E und damit auch dem Strom I . Die Differenz beider genannten Feldstärken, also $(E - v B_f)$, lässt sich gemäß dem Ohm'schen Gesetz mit dem Spannungsfall $I R_L$ darstellen.

Es gilt

$$E - v B_f = \frac{I R_L}{l} \quad \text{beziehungsweise} \quad E = v B_f + \frac{I R_L}{l}.$$

An der Oberfläche des Leiters treten also sowohl eine elektrische Feldstärke als auch eine magnetische Feldstärke auf, wobei die magnetische Feldstärke aus den oben definierten Komponenten H_f und H_L besteht. Das Kreuzprodukt dieser vektoriellen Größen ist der Poynting-Vektor \vec{S} :

$$\vec{S} = \vec{E} \times (\vec{H}_f + \vec{H}_L)$$

Der Poynting-Vektor hat also im vorliegenden Fall zwei Komponenten. Die erste Komponente $\vec{E} \times \vec{H}_f$ weist zu gleichen Teilen in den Leiter hinein und aus ihm heraus. Bei vorzeichenrichtiger Integration über die gesamte Oberfläche des Leiters verschwindet daher diese Komponente. Mit anderen Worten: Die vom Leiter aufgenommene Leistung ist ebenso groß wie die abgegebene. Der Leiter nimmt also aus der ersten Komponente keine resultierende Leistung auf.

Die zweite Komponente $\vec{E} \times \vec{H}_L$ weist an der gesamten Oberfläche des Leiters in den Leiter hinein. Der Leiter nimmt also die Leistung P auf, die sich durch Multiplikation aus dem Betrag des Poynting-Vektors und der Oberfläche $\pi D l$ des Leiters errechnet:

$$P = E H_L \pi D l = \left(v B_f + \frac{I R_L}{l} \right) \frac{I}{\pi D} \pi D l$$

Das kann man umschreiben zu:

$$P = v B_f I l + I^2 R_L = v F + I^2 R_L$$

Wie bereits am Beginn dieses Abschnittes ausgeführt, ist der Ausdruck $v F$ in dem hier betrachteten stationären Zustand

die mechanische Leistung P_{mech} . Der Ausdruck $I^2 R_L$ ist die Verlustleistung P_V infolge Stromwärme im Widerstand R_L des Leiters.

Der Leiter nimmt also die Summe aus der mechanischen Leistung P_{mech} und der Verlustleistung P_V auf:

$$P = P_{\text{mech}} + P_V$$

Sowohl die mechanische Leistung als auch die Verlustleistung werden dem elektrischen und magnetischen Feld außerhalb des Leiters entnommen und dem Leiter zugeführt.

Und damit wurde gezeigt, dass die Energie über die Felder von der Quelle zu den Verbrauchern fließt, und zwar auch zu den elektromechanischen Verbrauchern. Dieser Energiefluss wird vom Poyntingvektor beschrieben.

Schrifttum

(siehe Teil I dieses Aufsatzes in ETG *Journal* 02/2021, Seiten 72 bis 74)



Prof. Dr.-Ing. Fred Wiznerowicz
Hochschule Hannover



Prof. Dr.-Ing. habil. Hartmut Grabinski
Leibniz Universität Hannover



Prof. Dr.-Ing. Erhart Kunze
Hochschule Hannover